

### 3-3 莫爾圓

因為在計算主應力與最大剪應力過程中，牽涉到許多應力項次、符號判斷，及運算，增加了錯誤的可能性。採用莫爾圓法將可使誤差減至最小，並更易得知某一點應力情況。

在莫爾圓一經建立後，即可用以求得以下各項：

1. 找出最大主應力與最小主應力值及其作用方向。
2. 找出最大剪應力及其作用面的方向。
3. 求得最大剪應力作用面上之正向應力值。
4. 求得元素在任意方向上之正向應力與剪應力。

建立莫爾圓所需的數據當然與求得前述值所需者相同。當元素上之正向應力與剪應力已知時，即可建立，並依此找出上述四項所提的內容。若主應力值及最大剪應力值知道後，即可利用下一章中所述的種種破壞理論從事完整設計與分析。

莫爾圓可以下列敘述程序來建立：

1. 決定待求應力點正向應力與剪應力的大小及方向。
2. 畫出該點之應力元素圖。正向應力作用於互相垂直的平面上；拉應力為正值，朝元素外側作用；壓應力為負值，並朝元素內側作用。而剪應力則以順時針方向為正值；反之，則為負值。
3. 建立一直角座標。橫軸正方向表示正向拉應力（正值），縱軸正方向表示剪應力（順時針）。如此，即可建立一  $(\sigma - \tau)$  平面。
4. 把應力元素上所受之應力值畫於  $\sigma - \tau$  平面上。若該元素畫於  $x-y$  平面上，則可得兩點  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  與  $(\sigma_y, \tau_{yx})$ 。
5. 畫一線段連接兩點。
6. 該線段與  $\sigma$  軸之交點即為莫爾圓之圓心，且為兩正向應力  $(\sigma_x$  與  $\sigma_y)$  的平均值，即

$$\sigma_{\text{平均值}} = (\sigma_x + \sigma_y) / 2$$

按上述六步驟繪成如圖 3-10 所示。其中  $\sigma_x$  為正， $\sigma_y$  為負， $\tau_{xy}$  為正，且  $\tau_{yx}$  為負。但其只是為了說明方便而取任意符號。通常它可以是任意正、負值的結合。

圖 3-10 形成後，有邊長  $a, b$  和  $R$  其中

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

且由圖上可判斷出：

$$a = (\sigma_x - \sigma_y) / 2$$

$$b = \tau_{xy}$$

圓心  $O$  位於距原點  $(\sigma_x - a)$  處。接著再依下述步驟建立莫爾圓。

7. 以  $O$  點為圓心， $R$  為半徑畫一圓，如圖 3-11 所示。
8. 圓與  $\sigma$  軸交於兩點，而在右邊的那一個交點值即最大主應力  $\sigma_1$ 。
9. 圓與  $\sigma$  軸交於兩點，而在左邊的那一個交點值即最小主應力  $\sigma_2$ 。

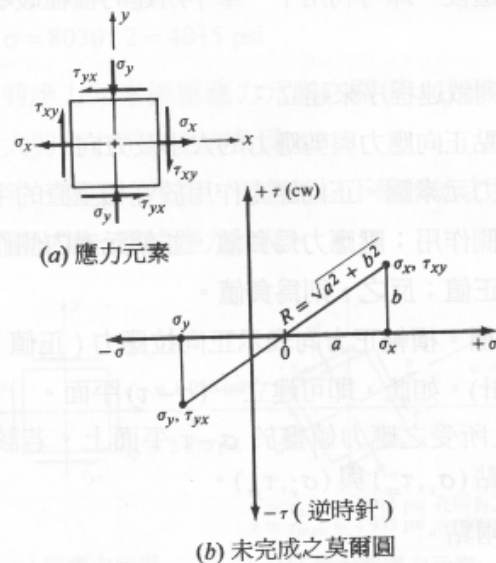


圖 3-10 未完成之莫爾圓圖，(步驟 1 至 6)

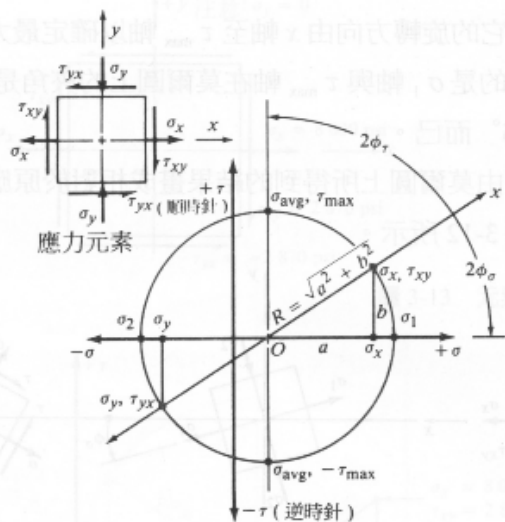


圖 3-11 完成之莫爾圓圖

10. 圓最上方那點的座標有最大剪應力；亦即表示在該正向應力作用下，元素有最大剪應力。

以下步驟將決定主應力元素與最大剪應力元素和原  $x$  軸之傾斜角。必須注意的是莫爾圓上的角度是實際角度的兩倍。參考圖 3-11，由  $O$  點通過  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  點之直線即表示原  $x$  軸；由  $O$  點通過  $(\sigma_y, \tau_{yx})$  之直線則為原  $y$  軸。當然，在原應力元素上，其夾角為  $90^\circ$ ，而不是像在莫爾圓上的  $180^\circ$ 。接著，再繼續下述步驟。

11.  $x$  軸與莫爾圓上所定義的  $\sigma_1$  軸間的夾角為  $2\phi_\sigma$ ，即：

$$2\phi_\sigma = \arctan(b/a)$$

並且應該注意由  $x$  軸至  $\sigma$  軸的旋轉方向（順時針或逆時針方向）。如此，才能夠確定出主應力元素與原應力元素之間的相互關係。

12. 由  $x$  軸至莫爾圓上垂直線的  $\tau_{\max}$  間的夾角為  $2\phi_\tau$ 。由圓之幾何圖形來看，可得

$$2\phi_\tau = 90^\circ - 2\phi_\sigma$$

同時也應注意它的旋轉方向由  $x$  軸至  $\tau_{\max}$  軸以確定最大剪應力元素方位。另外，應注意的是  $\sigma_1$  軸與  $\tau_{\max}$  軸在莫爾圓上的夾角是  $90^\circ$  而在實際元素上的夾角僅  $45^\circ$  而已。

13. 最後，便是將由莫爾圓上所得到的結果畫成相對於原應力元素的適當應力元素圖，如圖 3-12 所示。

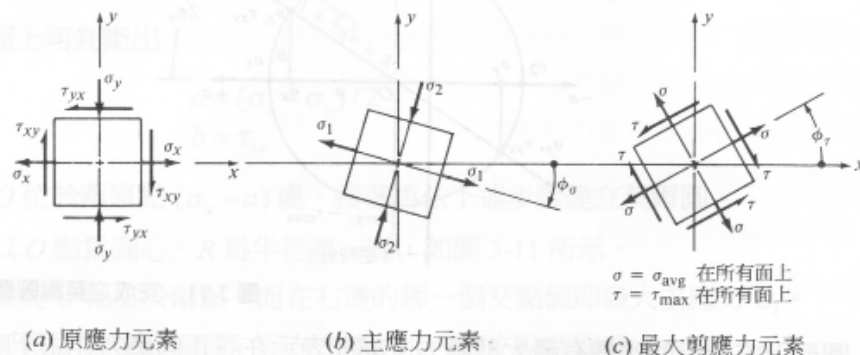


圖 3-12 由莫爾圓所獲得的結果

【例題 3-2】 同例題 3-1 所敘述之資料，而改用莫爾圓方式來求解。

圖 3-13 如同圖 3-7，是我們早先所決定出之元素  $K$  在原  $x-y$  平面上之應力值。由這些數據，再依據步驟 1-6 繪出莫爾圓，如圖 3-14。在尚未進行第 7 步驟前，我們必須先求得  $a$ ,  $b$  和  $R$  值。

$$a = (\sigma_x - \sigma_y) / 2 = (8030 - 0) / 2 = 4015 \text{ psi}$$

$$b = \tau_{xy} = 2870 \text{ psi}$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(4015)^2 + (2870)^2} = 4935 \text{ psi}$$

圖 3-15 即為完整的莫爾圓，步驟 7 以圓心  $O$  和半徑  $R$  畫圓。必須注意的是該圓必通過原先所畫的兩點  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  與  $(\sigma_y, \tau_{yx})$ 。

8.

$$\sigma_1 = 4015 + 4935 = 8950 \text{ psi 在圓的右側}$$

9.

$$\sigma_2 = 4015 - 4935 = -920 \text{ psi 在圓的左側}$$

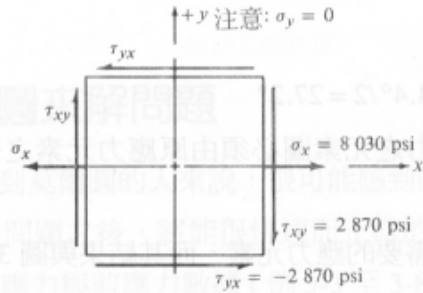


圖 3-13 元素 K 上之應力值

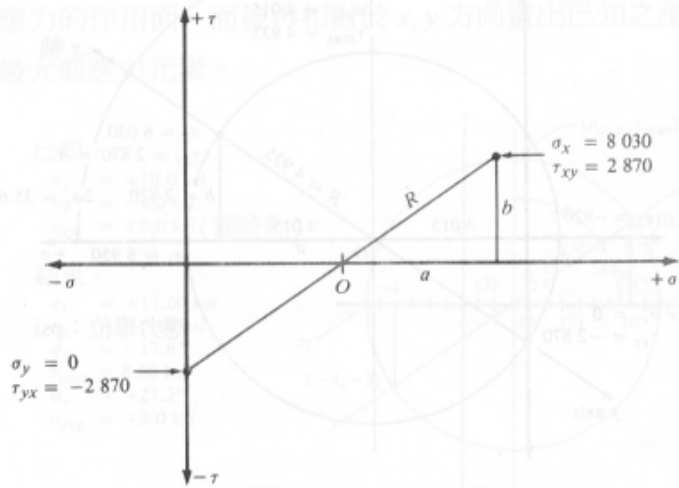


圖 3-14 例題 3-2 之未完成的莫爾圖

10.

$$\tau_{\max} = R = 4935 \text{ psi}$$

最大剪應力元素上的正向應力值即為圓心的座標值，亦即平均正向應力為 4015 psi

11.

$$2\phi_{\sigma} = \arctan(b/a) = \arctan(2870/4015) = 35.6^{\circ}$$

$$\phi_{\sigma} = 35.6^{\circ}/2 = 17.8^{\circ}$$

該注意的是  $\phi_{\sigma}$  為順時針方向，為原 x 軸與  $\sigma_1$  方向間的夾角。

12.

$$2\phi_{\tau} = 90^{\circ} - 2\phi_{\sigma} = 90^{\circ} - 35.6^{\circ} = 54.4^{\circ}$$

則

$$\phi_{\tau} = 54.4^{\circ}/2 = 27.2^{\circ}$$

該注意的是最大剪應力之元素圖必須由原應力元素之位置逆時針方向旋轉。

13. 圖 3-16 顯示出我們所需要的應力元素。而其結果與圖 3-8 和圖 3-9 相同。

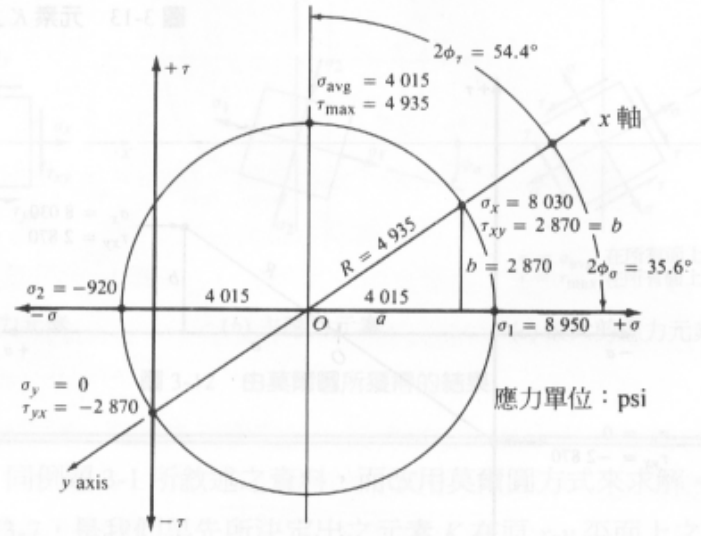
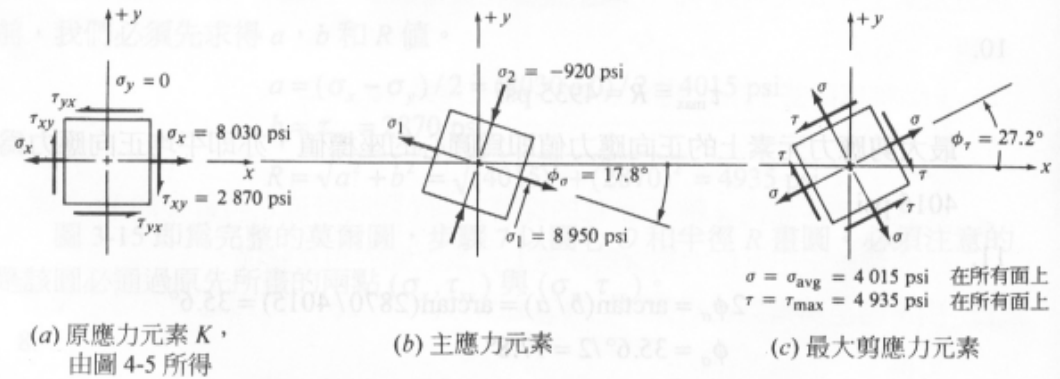


圖 3-15 完成之莫爾圖



(a) 原應力元素 K，由圖 4-5 所得

(b) 主應力元素

(c) 最大剪應力元素

圖 3-16 例題 3-2 利用莫爾圖法獲致的結果

純單軸向拉力

純單軸向壓力

純扭剪力

單軸向拉力與扭轉剪力之合成

它們之所以重要，是這些應力情況我們經常會碰到，且它們將用以說明下章中的破壞理論和設計方法。因為這些破壞理論是基於主應力值和最大剪應力值。

### □ 純單軸向拉力

圖 3-25 顯示純單軸向拉力之應力元素和其對應的莫爾圓。最大主應力， $\sigma_1$ ，等於外加應力， $\sigma_x$ ；最小主應力為零；而最大剪應力， $\tau_{\max}$  則等於  $\sigma_x/2$ 。

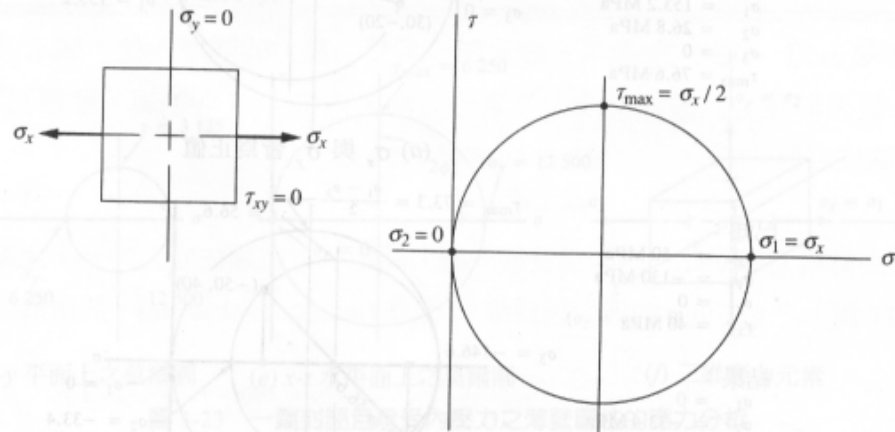


圖 3-25 純單軸向拉力之莫爾圓

### □ 純單軸向壓力

圖 3-26 顯示純單軸向壓力。由莫爾圓顯示  $\sigma_1 = 0$ ； $\sigma_2 = \sigma_x$ （負值）；且最大剪應力值的大小  $\tau_{\max} = \sigma_x/2$ 。

### □ 純扭轉

圖 3-27 顯示純扭轉的特殊情況。其莫爾圓的圓心在  $\sigma - \tau$  軸的原點且半徑等於外界所施加的剪應力值  $\tau_{xy}$ 。所以， $\tau_{\max} = \tau_{xy}$ ； $\sigma_1 = \tau_{xy}$  和  $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ 。

### □ 單軸向拉力與扭轉剪力之合成

這是一種很重要的特殊例子，因為它描述了承受彎曲負荷的旋轉軸，同時傳輸扭矩的應力情形。而它的應力情形即將為第九章中我們設計軸的一個基礎。如果施加應力為  $\sigma_x$  和  $\tau_{xy}$ ，由圖 3-28 中的莫爾圓顯示

$$\tau_{\max} = R = \text{圓之半徑} = \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3-7)$$

$$\sigma_1 = \sigma_x/2 + R = \sigma_x/2 + \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3-8)$$

$$\sigma_2 = \sigma_x/2 - R = \sigma_x/2 - \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3-9)$$

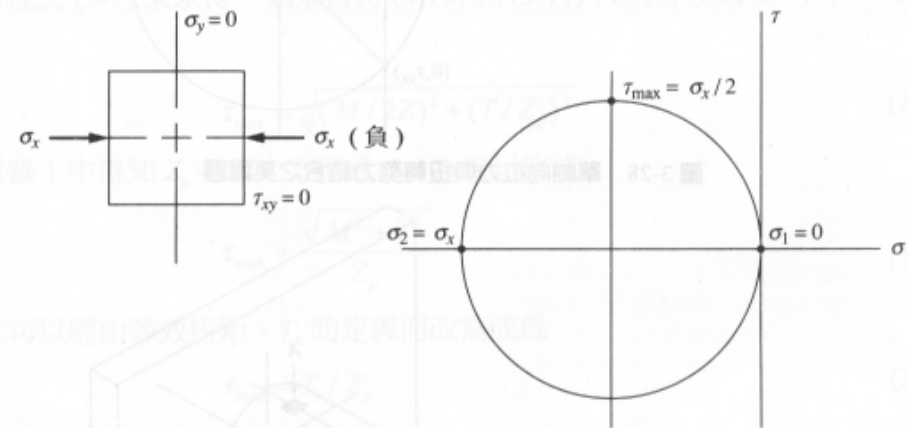


圖 3-26 純單軸向壓力之莫爾圓

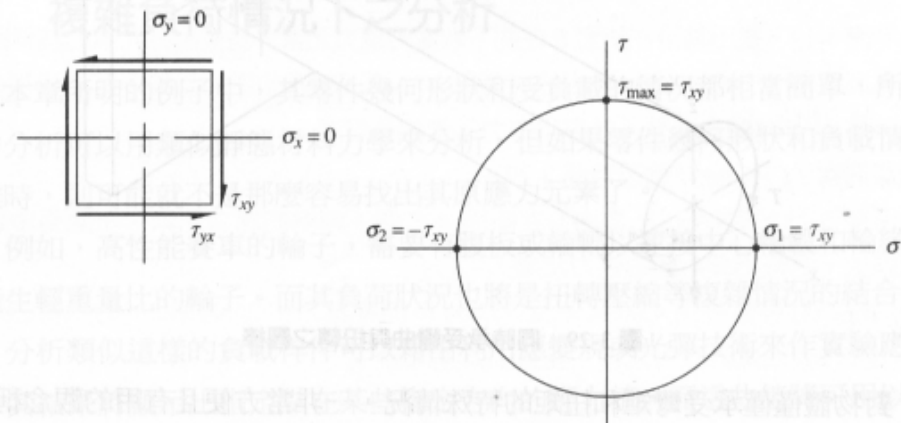


圖 3-27 純扭轉剪力之莫爾圓

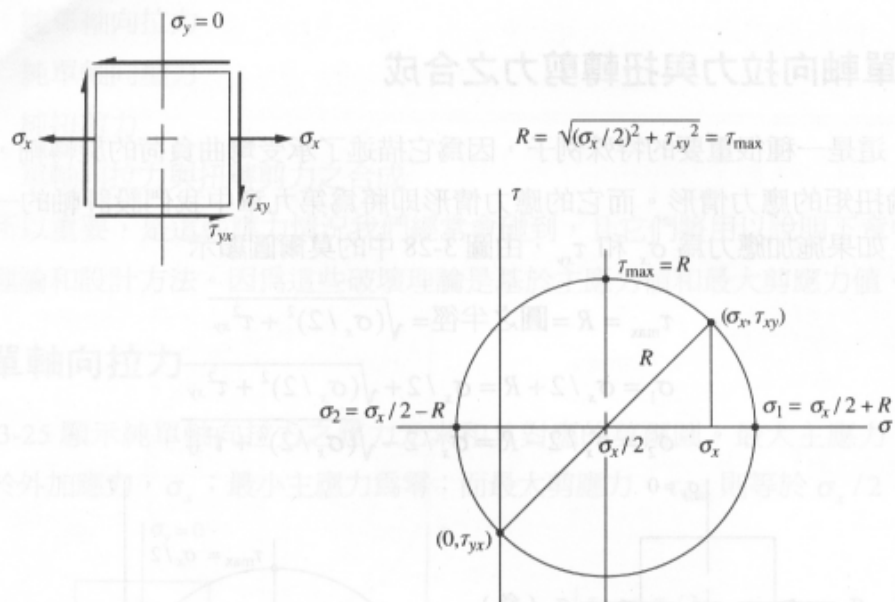


圖 3-28 單軸向拉力與扭轉剪力結合之莫爾圓

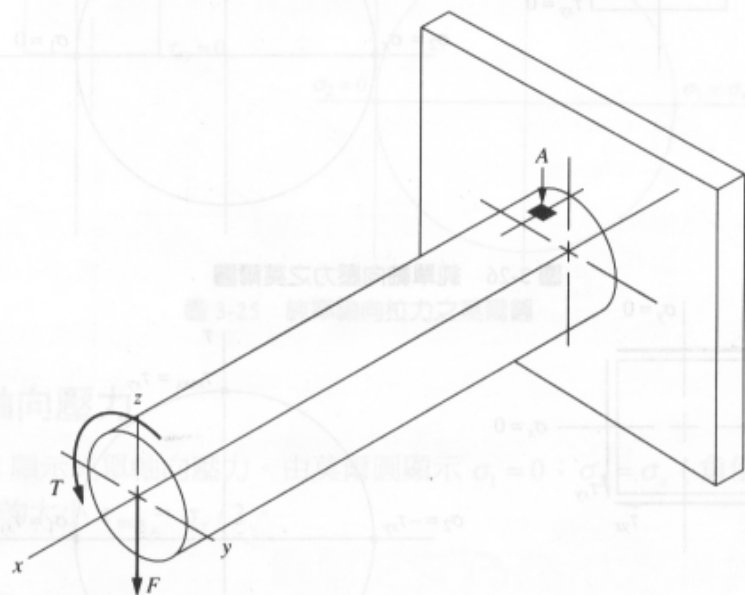


圖 3-29 同時承受彎曲與扭轉之圓棒

對物體僅僅承受彎矩和扭矩的特殊情況，一非常方便且有用的觀念稱為等效扭矩 (equivalent torque)，可由方程式 (3-7) 發展出來。圖 3-29 為圓棒於自由

端處承受一向下力量和扭轉力矩。負荷在接近支持端處造成最大力矩。而此力矩在圓棒  $x$  軸方向處上方的  $A$  形成拉應力，其應力大小為

$$\sigma_x = M/Z \quad (3-10)$$

其中  $Z$  為圓棒之斷面模數。

現在扭轉力矩在點  $A$  所造成的扭轉剪應力大小為：

$$\tau_{xy} = T/Z_p \quad (3-11)$$

其中  $Z_p$  為圓棒之極斷面模數。

點  $A$  同時承受拉應力和剪應力，其莫爾圓示於圖 3-28。而最大剪應力可以由方程式 (3-7) 來求得。如果再將 (3-10) 和 (3-11) 代入方程式 (3-7) 中，可以得到

$$\tau_{\max} = \sqrt{(M/2Z)^2 + (T/Z_p)^2} \quad (3-12)$$

由附錄 1 中得知  $Z_p = 2Z$ ，方程式 (3-12) 可以寫成

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{Z_p} \quad (3-13)$$

上式可以經由等效扭矩， $T_e$  的定義而改寫成爲

$$\tau_{\max} = T_e/Z_p \quad (3-14)$$

### 3-7 複雜負荷情況下之分析

本章所明的例子中，其零件幾何形狀和受負載的情況都相當簡單，所以其應力分析可以用類似靜態材料力學來分析。但如果零件幾何形狀和負載情況較複雜時，則可能就不是那麼容易找出其原應力元素了。

例如，高性能賽車的輪子，需要有腹板或輪輻以連接中心輪轂和輪緣處藉以產生輕重量比的輪子。而其負荷狀況也將是扭轉壓縮等複雜情況的結合。

分析類似這樣的負載桿件可以藉由利用應變規或光彈技術來作實驗應力分析。其結果將顯示出指定點在某些指定方向的應力值，而這些值將可用以作為畫出莫爾圓的數據。